Шумякин И.С. 2ИВТ(2)/19

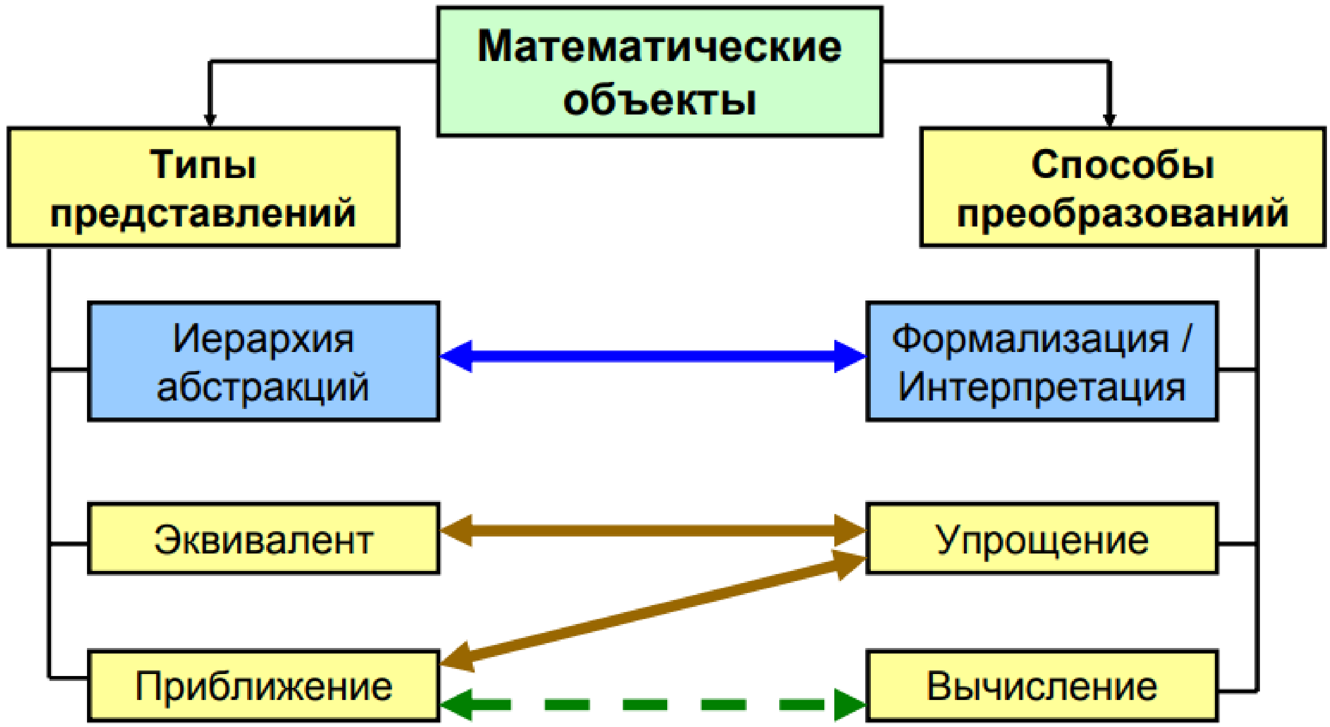
Математические объекты и их представления

Система компьютерной алгебры[1] (СКА, англ. computer algebra system, CAS) — это прикладная программа для символьных вычислений, то есть выполнения преобразований и работы с математическими выражениями в аналитической (символьной) форме. (Википедия).

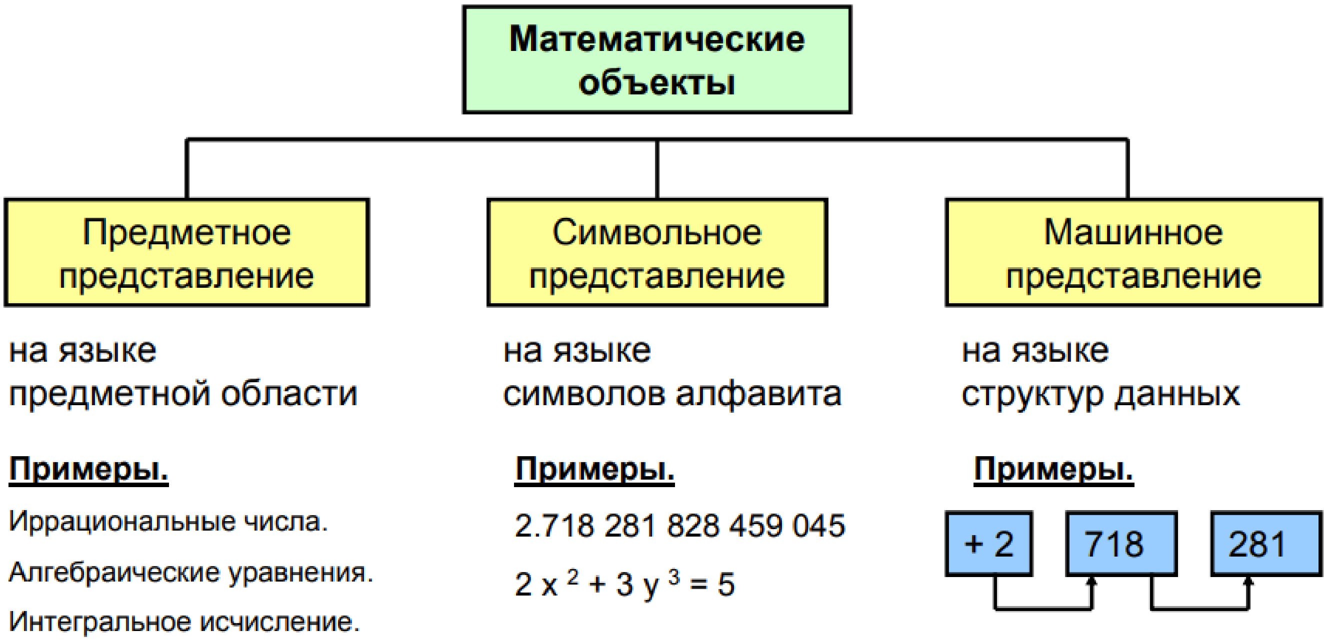
Компьютерная алгебра[2] — область математики, лежащая на стыке алгебры и вычислительных методов. Для нее, как и для любой области, лежащей на стыке различных наук, трудно определить четкие границы. Часто говорят, что к компьютерной алгебре относятся вопросы, слишком алгебраические, чтобы содержаться в учебниках по вычислительной математике и слишком вычислительные, чтобы содержаться в учебниках по алгебре. При этом ответ на вопрос о том, относится ли конкретная задача к компьютерной алгебре, часто зависит от склонностей специалиста. (Академик).

Компьютерная алгебра[3] – термин выражает способность компьютеров манипулировать математическими выражениями, заданными символьно, а не численно, по аналогии с алгеброй высказываний. Используя символьное представление точных чисел и алгебраических выражений, системы компьютерной алгебры помогают в вычислениях, сокращая количество численных ошибок. Компьютерная алгебра используется при решении широкого круга проблем. (СибГУ).

Классификация математических объектов компьютерной алгебры[4]



[1] https://ru.wikipedia.org/
[2] https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/308929
[3] https://www.sibsau.ru/sveden/edufiles/135565/
[4] Источник: http://kspt.icc.spbstu.ru/media/files/2012/course/comp-algebra/CAS_L07.pdf



Базовые объекты компьютерной алгебры:

- Целые числа
- Рациональные числа
- Полиномы от одной переменной
- Полиномы от нескольких переменных
- Рациональные функции

Возможны различные способы представлений целых чисел:

(1) ограниченной точности,

(2) произвольно заданной точности,

(3) неограниченной точности

В системах компьютерной алгебры целые числа неограниченной точности, реализуются программным путем, (этот тип данных считается базовым).

Возможны различные способы представлений рациональных чисел произвольной точности :

(1) отношение числителя и знаменателя (оба - числа произвольной точности). Пример. Записи вида –2 / 3, 2 / -3, 4 / -6, -10 / 15 и т.п. представляют одно и то же число.

(2) Так же, как в (1), но выполнив дополнительные условия : (а) числитель и знаменатель числа должны быть сокращены на наибольший общий делитель (НОД); (б) знаменатель должен быть положительным числом. Такое представление является каноническим.

В системах компьютерной алгебры обычно используется каноническое представление рациональных чисел произвольной точности.

Полином от одной переменной представляет собой сумму мономов, иными словами – последовательность (или список). Коэффициенты мономов могут быть числами разных типов, в том числе целыми числами произвольной точности. (Степени переменных – короткие целые числа).

Представление полинома является каноническим, если последовательность мономов упорядочена по возрастанию (или по убыванию) степени мономов.

Полином можно хранить как в плотном, так и в разреженном представлении. В плотном представлении хранится: число мономов (определяемое как максимальная степень старшего монома плюс единица), и все, в том числе, нулевые коэффициенты мономов. Такое представление эффективно для алгоритмов преобразования полиномов, в которых (1) число членов рядов для вычислений с повышением точности вычислений растет быстро и (2) мало число нулевых членов.

В разреженном представлении хранится последовательность (список), в каждом блоке которой хранится запись об одном ненулевом мономе, содержащая коэффициент монома и его степень.

Полином A (x) = x^{1000} - 1 требует существенно различные ресурсы при хранении в плотном и в разреженном представлениях.

Полином от нескольких переменных представляет собой сумму мономов, иными словами – последовательность (или список), а моном – произведение термов (тоже последовательность).

Различают две формы канонического представления полинома от нескольких переменных:

(1) форма с упорядочением последовательности мономов;

(2) рекурсивная форма.

Рекурсивная форма получается с помощью представления полинома от нескольких (N) переменных в виде полинома от одной переменной с коэффициентами – полиномами от других (N-1) переменных.

В результате можно получить следующие канонические представления :

(1) Лексикографическое упорядочение по степени каждой переменной;

(2) Упорядочение по общей степени с прямым (с обратным) лексикографическим порядком на степень каждой переменной.

Дробно-рациональные функции, представляющие отношение полиномов, эффективно хранить в виде записи, содержащей ссылку на полином - числитель и ссылку на полином – знаменатель. При этом полиномы должны находиться в одной канонической форме.

Представление рациональной функции будет каноническим, если дополнительно ввести следующие условия:

(1) числитель и знаменатель должны быть сокращены на полином – наибольший общий делитель (НОД) этих двух полиномов;

(2) числовые коэффициенты числителя и знаменателя должны быть сокращены на общий множитель;

(3) старший коэффициент знаменателя должен быть положительным.

Как правило, в системах компьютерной алгебры реализуется несколько и канонических, и нормальных форм представления полиномов от нескольких переменных.

Функции[5]

Алгебраическая функция[6] — элементарная функция, которая в окрестности каждой точки области определения может быть неявно задана с помощью алгебраического уравнения.

Формальное определение:

Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется алгебраической в точке $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, если существует окрестность точки A, в которой верно тождество

$$P(F(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

где P есть многочлен от $n+1$ переменной.

Функция называется алгебраической, если она является алгебраической в каждой точке области определения.

Например, функция действительного переменного $F(x) = \sqrt{1 - x^2}$ является алгебраической на интервале $(-1, 1)$ в поле действительных чисел, так как она удовлетворяет уравнению

$$F^2 + x^2 = 1.$$

Трансцендентная функция[7] — аналитическая функция, не являющаяся алгебраической. Простейшими примерами трансцендентных функций служат показательная функция, тригонометрические функции, логарифмическая функция.

Если трансцендентные функции рассматривать как функции комплексного переменного, то характерным их признаком является наличие хотя бы одной особенности, отличной от полюсов и точек ветвления конечного порядка.

Среди алгебраических функций выделяются целые многочлены и рациональные дроби.

Целым многочленом (полиномом) степени *n* относительно переменной *x* называется функция следующего вида:

$$P_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n \quad (1)$$

здесь $n \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ — степень многочлена;

$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ – коэффициенты многочлена (числа или параметры);

$a_0 \neq 0$ – старший коэффициент.

Например,

1) $P_1(x) = ax + b,\ a \neq 0$ – многочлен первой степени;

---

[5] https://studfile.net/preview/2646984/
[6] https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгебраическая_функция
[7] https://ru.wikipedia.org/wiki/Трансцендентная_функция

2) $P_2(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ — квадратный трехчлен, или квадратичная функция;

3) $P_0(x) = a$ — многочлен нулевой степени;

4) $P_{10}(x) = x^{10} - 5x + 7$ - многочлен 10-й степени.

График квадратичной функции

Функция $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ называется ***квадратичной функцией***.

Число $D = b^2 - 4ac$ называется ***дискриминантом квадратного трехчлена***.

Графиком квадратичной функции является парабола, ее положение относительно координатных осей определяется знаком старшего коэффициента *a* и значением дискриминанта *D* (см. таблицу на рис. 59).

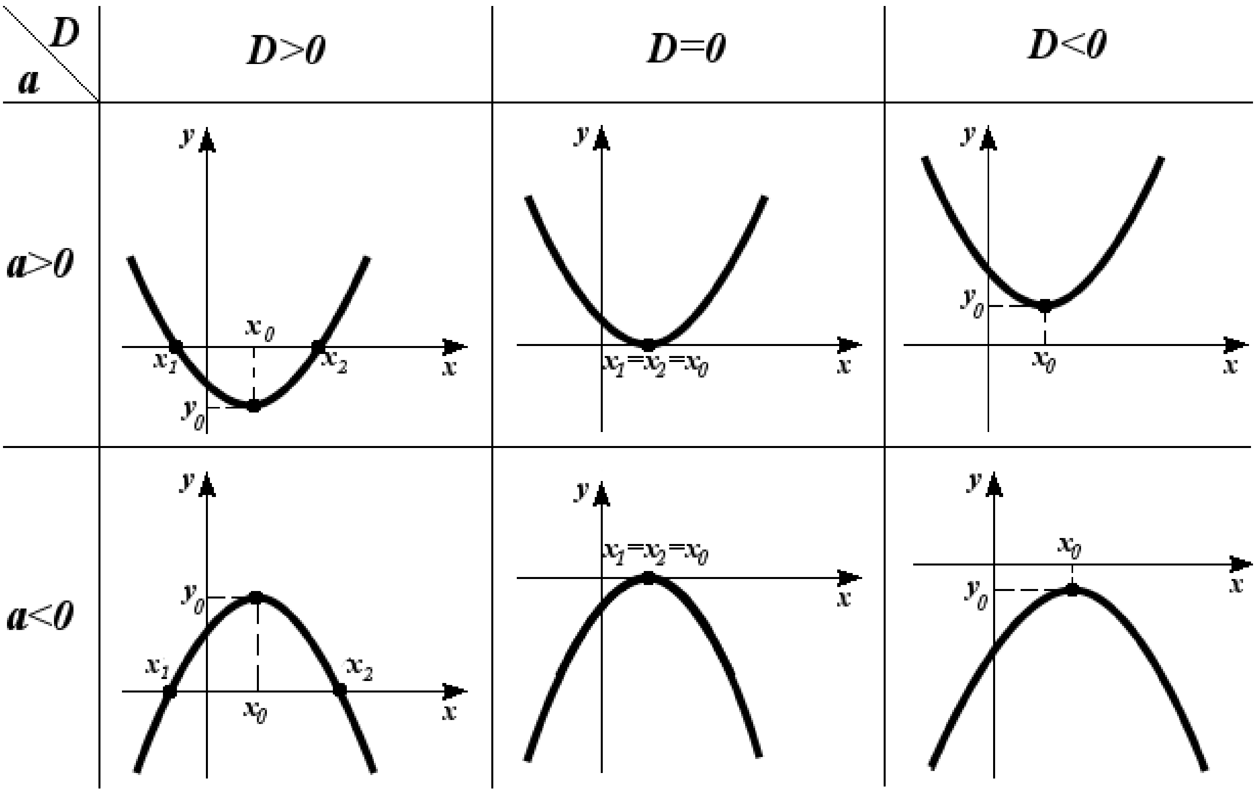


Рис.59

Здесь x_1, x_2 — это нули квадратичной функции, вычисленные как корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, если $D > 0$; $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы (точка экстремума); $y_0 = y(x_0)$ — ордината вершины (экстремум квадратичной функции).

Иррациональные функции — это такие функции, не являющиеся рациональными, которые могут быть заданы композицией конечного числа рациональных функций, степенных функций с рациональными показателями и четырех арифметических действий.

Например,

1) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$; 3) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$;

2) $f(x)=x^2\times\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$; 4) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}\times(x+1)$.

Представление матриц / интегралов / производной / СЛАУ[8]

Для примера рассмотрим представление матриц и СЛАУ

Различают две формы представления матриц :

Двумерный массив :

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} – это ссылки на представление элементов матриц (формул)

Список списков :

$$((a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}))$$

Плотные и разреженные представления:

Для представления матриц обычно используется плотное представление (т.е. хранятся все элементы матриц, включая нулевые).

В некоторых особых случаях для матриц специального вида (диагональных, ленточных и т.п.) применяется разреженное представление.

Замечание. В случае использования разреженного представления требуются специальные алгоритмы преобразований матриц.

Вывод: при работе с математическими пакетами, такими как Maxima, представление матриц, интегралов, производных и систем линейных алгебраических уравнений максимально приближено к математическим записям «на бумаге». Это сделано для того, чтобы облегчить вычисления и анализ математических результатов. Чтобы максимально наглядно, привычным способом, показать пользователю вывод значений.

Большинство сервисов стараются делать приближенные представления, однако вычисления можно выполнять и не в полностью визуально предназначенных для этого программах, таких как Excel. При работе с данной программой вы также получите верный результат, но представленный исключительно в табличном виде.

---

[8] http://kspt.icc.spbstu.ru/media/files/2012/course/comp-algebra/CAS_L07.pdf